

**А.А. Мусина<sup>1</sup>, К.П. Аман<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Актюбинский региональный университет им.К. Жубанова  
Казахстан, г.Актобе  
e-mail: [alla.mussina@mail.ru](mailto:alla.mussina@mail.ru)

## ОБ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В работе дается обзор существующих математических моделей неоднородных жидкостей в пористых средах. А также изучение зависимости изменения свободной границы от скорости распространения неоднородного раствора от внешних параметров, таких как температура и давление.

Основными методами исследования являются классические методы математической физики, функционального анализа и методы вычислений теории уравнений с частными производными, разностные методы.

Количество научных работ, посвященных исследованию пористых структур, в последнее время увеличилось. Это связано, прежде всего, с тем, что обозначились проблемы добычи нефти и урана, назрело решение экологических проблем. Поэтому требуется новый аппарат для разработки моделей фильтрации жидкостей. С появлением и развитием вычислительной техники стало проще решать задачи, которые требуют для своего решения численные методы.

В настоящее время выщелачивание горных пород описывается большим спектром математических моделей на макроскопическом уровне. Основные механизмы физических процессов сосредоточены на свободной границе между поровым пространством и скелетом грунта. В настоящее время выщелачивание горных пород описывается большим спектром математических моделей на макроскопическом уровне.

**Ключевые слова:** математические модели, выщелачивание жидкости, макроскопические модели, жидкостно-структурное взаимодействие, пористая среда, закон Дарси, анизотропная неоднородная пористая среда.

**А.А. Мусина<sup>1</sup>, К.П. Аман<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті  
Қазақстан, Ақтөбе қаласы  
e-mail: [alla.mussina@mail.ru](mailto:alla.mussina@mail.ru), [kulnar@inbox.ru](mailto:kulnar@inbox.ru)

## Сүзу теориясының негізгі математикалық модельдері туралы

Мақалада кеуекті ортадағы біртекті емес сұйықтықтардың математикалық модельдеріне шолу жасалған. Сондай-ақ температура мен қысым сияқты еркін шекара өзгерісінің сыртқы параметрлерге біртекті емес ерітіндінің таралу жылдамдығына тәуелділігін зерттеу.

Зерттеудің негізгі әдістері болып математикалық физиканың классикалық әдістері, функционалдық талдау және дербес дифференциалдық теңдеулер теориясын есептеу әдістері, айырмашылық әдістері.

Соңғы кездері кеуекті құрылымдарды зерттеуге арналған ғылыми еңбектердің саны көбейді. Бұл ең алдымен, мұнай мен уран өндірісінің проблемаларынан пайда болып, экологиялық проблемаларды шешетін уақыт келгендігімен байланысты. Сондықтан сұйық сүзу модельдерін жасау үшін жаңа аппарат қажет. Компьютерлік технологияның пайда болуы мен дамуына байланысты оларды шешудің сандық әдістерін қажет ететін есептерді шешу оңайға түсті.

Қазіргі уақытта тау жыныстарын сілтілеу макроскопиялық деңгейде математикалық модельдердің кең спектрімен сипатталады. Физикалық процестердің негізгі механизмдері кеуектер кеңістігі мен топырақ қаңқасы арасындағы еркін шекарада шоғырланған. Қазіргі уақытта тау жыныстарын сілтілеу макроскопиялық деңгейде математикалық модельдердің кең спектрімен сипатталады.

**Түйін сөздер:** математикалық модельдер, сұйықтық сілтілендіру, макроскопиялық модельдер, сұйық-құрылымдық өзара әрекеттесу, кеуекті орта, Дарси заңы, анизотропты біртекті емес кеуекті орта.

**А.А. Mussina<sup>1</sup>, К.П. Aman<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Aktobe Regional University named after K. Zhubanov  
Kazakhstan, Aktobe,  
e-mail: [alla.mussina@mail.ru](mailto:alla.mussina@mail.ru)

## About the main mathematical models of Filtration Theory

The paper provides an overview of the existing mathematical models of inhomogeneous fluids in porous media. And also the study of the dependence of the change in the free boundary on the rate of propagation of an inhomogeneous solution on external parameters, such as temperature and pressure.

The main research methods are classical methods of mathematical physics, functional analysis and methods of calculating the theory of partial differential equations, difference methods.

The number of scientific works devoted to the study of porous structures has increased recently. This is due, first of all, to the fact that the problems of oil and uranium production have emerged, and the time has come to resolve environmental problems. Therefore, a new apparatus is required to develop models for the filtration of liquids. With the advent and development of computer technology, it has become easier to solve problems that require numerical methods for their solution.

Currently, rock leaching is described by a wide range of mathematical models at the macroscopic level. The main mechanisms of physical processes are concentrated on the free boundary between the pore space and the soil skeleton. Currently, rock leaching is described by a wide range of mathematical models at the macroscopic level.

**Key words:** mathematical models, liquid leaching, macroscopic models, fluid-structural interaction, porous medium, Darcy's law, anisotropic inhomogeneous porous medium.

Французский инженер Анри Дарси является основателем теории фильтрации, он описал особенности движения жидкости в пористой среде. Начиная с его работ, проблемой изучения движения жидкостей и газов в пористых средах занимались многие ученые. Вклад в развитие теории фильтрации внесли такие ученые, как: Ж. Дюпюи, Н. Е. Жуковский, Ф. Форхгеймер, К. Э. Лембке, М. Маскет, Ч. Сликтер, Л. С. Лейбензон и другие.

Знания в этой области долгое время накапливались без системного подхода и взаимного согласования огромного количества данных. Накопленные отрывочные знания не получали массового распространения среди специалистов, так имелись сложности с аналитическим исследованием решения задач. Но с появлением вычислительной техники и возможностью использовать численные методы для решения дифференциальных уравнений в частных производных, стал использоваться метод математического моделирования.

Развитию теории фильтрации способствовало также и бурное развитие нефтяной и газовой промышленности и усилившееся внимание к экологическим проблемам окружающей среды. Это привлекло внимание исследователей к более сложным вопросам движения природных газов и нефти в пористой среде. Тема разработки математических моделей теории фильтрации является актуальной темой исследований [1, с.2].

Количество научных работ, посвященных исследованию пористых структур, увеличилось. Данным вопросом также занимались ученые Г. И. Баренблатт, В. М. Рыжик, А. В. Кажихов, Н. В. Хуснутдинова, О. Б. Бочаров, В. Н. Монахов, А. Е. Осокин, Мейрманов А. М., Мухамбетжанов С.Т. и другие.

Большинство моделей и постановок задач фильтрации ориентированы на долгосрочный прогноз процессов в масштабах всего месторождения, тогда как процессы, протекающие непосредственно в прискважинной зоне пласта имеют краткосрочный характер и существенно влияют на структуру решения в целом [2, с.58]. В настоящее время проблемой является сложность определения, как меняется агрегатное состояние вещества с учетом скорости химической реакции, когда и каким образом меняется граница между подобластями. Если она меняется из-за градиента температуры, то это приводит к задаче Стефана. Основные трудности при решении данной задачи связаны с тем, что подвижные границы раздела фаз формируют переменные области для вычисления значений температуры или концентрации, а положение этих межфазных границ заранее не известно и также должно определяться в ходе решения.

Задача Стефана – это задача, в которой определяется поле температуры и границы фазового перехода в чистом веществе. Агрегатное состояние среды может меняться только из-за теплопроводности среды под воздействием

внешних и внутренних источников тепла. Передача энергии в каждой фазе рассматриваемого вещества описывается уравнением теплопроводности, а поведение границы фазового перехода, называемой свободной границей описывается условием Стефана [3, с.2].

Использование аналитических методов для решения классической задачи Стефана является не простой задачей. Решение такой задачи возможно для ограниченного количества случаев. Поэтому широкое распространение получили численные методы. Главной их особенностью является отсутствие необходимости точного отслеживания положения межфазных границ, что оказывается достаточно эффективным при решении многомерных и многофазных задач. В работах Гущина В.А. и Белоцерковского С.О. была проведена огромная работа в этом направлении для задач обтекания конечных тел вязкой жидкостью, что позволило выявить основные эффекты явления и оценить влияние краевых условий.

Цель работы - провести обзор основных понятий теории фильтрации и существующих математических моделей неоднородных жидкостей в пористых средах для изучения зависимости изменения свободной границы от скорости распространения неоднородного раствора и внешних параметров, таких как температуры, давление, концентрации реагентов.

Объект исследования – это математические модели движения неоднородных жидкостей в пористых средах и методы решения начально-краевых задач.

Предмет исследования - математические модели двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей в пористом скелете и численные методы их решения.

Обзор научных работ и исследование основных математических моделей теории фильтрации дает понимание движения жидкостей, раскрывает механизм растворения горных пород под действием кислот в неоднородных пористых средах.

Это имеет фундаментальное значение для урана и производства нефти, а также для эффективного управления ее добычей.

В настоящее время выщелачивание пород описывается большим количеством разнообразных моделей, которые дают представление о физических процессах на макроуровне. В таких моделях в каждой точке сплошной среды есть жидкость в порах и твердый скелет.

В трудах таких ученых, как Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Каневская Р. Д., Максимов В. М., Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С., Полубаринова-Кочина П. Я., Шестаков В. М. используются наиболее простые модели пористых сред.

Решение современных проблем добычи нефти из слоистых, трещиноватых, трещиновато-пористых природных пластов грунта требуют создания и исследования новых математических моделей фильтрационных течений с учётом усложнённой структуры пористых сред. Для этого применяют линейный закон Дарси, обобщённый на случай анизотропной неоднородной пористой среды, характеризуемой тензором проницаемости, компоненты которого, вообще говоря, несимметричны и зависят от координат точки в среде. Возможность и необходимость использования такого обобщённого закона Дарси отмечена в работах Коллинза Р.

Основными методами исследования являются классические методы математической физики, функционального анализа и методы вычислений теории уравнений с частными производными, разностные методы.

Решение таких проблем, как добыча флюидов из природных пластов грунта разной сложной геологической структуры и перемещение загрязнений в таких пластах, требуют разработки и исследования новых математических моделей фильтрации, которые учитывают сложную структуру пористых сред.

Для этого чаще всего используют линейный закон Дарси, обобщённый на случай анизотропной неоднородной пористой среды, которая характеризуется тензором проницаемости, компоненты которого несимметричны, а также зависят

от координат точки в этой среде. Возможность, а также необходимость применения такого обобщённого закона Дарси отмечена в работах такого исследователя, как Коллинз Р.

Н.Н. Веригиным впервые была предложена простейшая модель растворения твердого вещества из пористой среды одномерным фильтрационным потоком. Данная модель описывает изменение концентраций полезного компонента в растворе  $C$  и породе  $N$ . Такая динамика растворения в его работах описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнение материального баланса массы растворяемого компонента имеет вид (1):

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} + u_{\partial} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

где  $u_{\partial}$  – действительная скорость движения растворов. Разность между концентрацией насыщенного раствора  $C_H$  и текущей концентрацией растворяемого компонента в растворе  $C$  является движущей силой реакции. Таким образом, уравнение кинетики растворения принимает следующий вид (2):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\beta(C_H - C) \quad (2)$$

где  $\beta$  - коэффициент скорости растворения. величина коэффициента  $\beta$  в общем случае зависит от коэффициента диффузии растворяемого компонента в растворе, скорости движения, температуры, удельной площади поверхности реакции и ряда других факторов. Удельная площадь поверхности реакции постоянна в случае пленочного распределения растворяемого компонента в твердой фазе, а в случае дисперсного распределения она уменьшается со временем по мере снижения концентрации компонента в породе.

Для решения системы уравнений (1) и (2) следует задать начальные и граничные условия. Начальные условия рассматриваются, как постоянные в

области, приведенные концентрации полезного компонента в растворе равны  $C(x,0)=C_0$  и породе  $N(x,0)=N_0$ . Полагается равной нулю начальная концентрация растворяемого компонента во входном растворе (это граничное условие  $C(0,t)=0$ ). Проводя анализ решения системы уравнений (1) и (2) можно получить такие закономерности растворения для пленочного распределения растворяемого компонента в твердой фазе.

Образуются три зоны в процессе растворения (зона полного растворения, зона частичного растворения и зона исходного содержания), которые перемещаются со временем в направлении движения растворов. Длительность полного растворения во входном сечении  $x=0$ , то есть время формирования зоны полного растворения  $\tau$ , находится из формулы (3):

$$\tau = N_0/\beta C_H \quad (3)$$

После этого зона полного растворения начинает расширяться. Граница зоны перемещается вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v_B$ :

$$v_B = \frac{u_{\partial}}{1+N_0/C_H} \quad (4)$$

В момент времени  $t>\tau$  зона полного растворения будет занимать область  $0<x<x<u_{\partial}t$ . В этой зоне происходит переход растворяемого компонента из твердой фазы в жидкую. При этом концентрация полезного компонента в растворе будет возрастать от нуля до максимального значения. Значение в максимальной концентрации полезного компонента в растворе  $C_{\max(t)}$  растёт со временем и приближается к величине концентрации насыщенного раствора  $C_H$  ( $C_{\max(t)}=C_H(1-\exp(-\beta x/u_{\partial}))$ ). Возрастает от нуля до исходной величины и концентрация полезного компонента в породе в зоне частичного растворения.

Математическая модель, которая описывает подземное выщелачивание с учетом этих особенностей, была предложена в своих работах В.С. Голубевым, Г.Н. Кричевцом. Ученые

разработали одномерную модель выщелачивания, которая описывает изменение приведенных концентраций полезного компонента в растворе  $C$  и породе  $N$  и кислоты  $A$ . Раствор кислоты с исходной концентрацией  $A_{in}$  фильтруется в направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $u_0$ . Также, как в модели ученого Н.Н.Веригина, движущей силой реакции является разность между концентрацией раствора и текущей концентрацией растворяемого компонента в растворе. Но в данной модели растворимость полезного компонента определяется только концентрацией кислоты.

В настоящее время выщелачивание горных пород описывается большим спектром математических моделей на макроскопическом уровне.

Отметим, что в макроскопических моделях каждая точка твердого скелета и жидкость в порах представлены как сплошная среда. Эти предлагаемые модели имеют сходные структуры и принципы, и их дифференциальные уравнения просто постулируются.

Обычно динамика жидкости описывается системой фильтрации Дарси. Но наряду с этим, уравнения диффузии-конвекции разнообразны, и выбор между ними зависит только от предпочтений исследователя или ученого. В этих моделях содержится неизвестная пористость среды, а различное дополнительное уравнение для этой пористости варьируется от одной модели к другой модели. Основные механизмы физических процессов сосредоточены на свободной границе между поровым пространством и скелетом грунта. Так как растворение пород происходит на этой границе. Р. Барридж и Дж. Б. Келлер, Е. Санчез-Паленсия были первыми исследователями, кто предложил описывать макроскопические математические модели фильтрации, опираясь именно на микроструктуру.[10] Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

(а) требуется описать наиболее точно физический процесс на микроскопическом уровне или на уровне пор;

(б) требуется определить набор необходимых малых параметров;

(с) требуется вывести макроскопическую модель как асимптотический предел точной модели.

В 1937 г., была издана работа американского ученого М. Маскета. В работах Р. Коллинза, М. Леверетта, М. Маскета, С. Бакли, Д. Катца освещаются двухфазная фильтрация, приток упругой жидкости к скважине, гидродинамические расчеты продвижения воды в пределы нефтяной или газовой залежи.[4,с.408]

Простейшей моделью двухфазной фильтрации является модель ученого Баклея-Леверетта, которая определяет равенство фазовых давлений, и поэтому не учитывает влияние на движение жидкостей самих капиллярных сил. Корректность нелинейных краевых задач модели Маскета-Леверетта установлена в работах Антонцева С.Н., Монахова В.Н., Кажихова А.В. Численным исследованием этих задач занимались Коновалов А.Н., Коробицына Ж.Л., Леви Б.И.

В наши дни развитие теории фильтрации прежде всего связано с исследованием многофакторных процессов движения различных агентов в неоднородных пластах при разных начальных и граничных условиях. Процессы, связанные с повышением степени извлечения нефти из недр занимают особое место в изучении. Это нагнетание в нефтяные залежи агентов, которые смешиваются с нефтью, а также термическое воздействие на сам нефтяной пласт, закачка различных растворов. Система дифференциальных уравнений движения флюидов при этом дополняется уравнениями диффузии, термодинамики, конвективного перемешивания, адсорбции и десорбции и т.д. Труды ученых Г.И. Баренблатта, К.С. Басниева, Ю.П. Желтова, Б.Б. Лапука, А.Х. Мирзаджанзаде, В.Н. Николаевского, Г.Б. Пыхачева посвящены решению названных проблем теории фильтрации.

**Литература.**

- 1.Багов Р.А., Цей Р., Об основных понятиях теории фильтрации и основных этапах ее развития// Вестник Адыгейского государственного университета, серия 4: естественно-математические и технические науки, - №3(266). -2007
- 2.Мейрманов А. М. О некоторых принципах моделирования задач фильтрации жидкости со свободной границей //Научные ведомости. -№13(53). -2008
- 3.Мейрманов А. М. Задача Стефана.Новосибирск: Наука, 1986.
- 4.Пивень Д. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. - Орёл: издательство ФГБОУ «Орловский государственный университет», -2015. - 408 с.

**Literatura.**

- 1.Bagov R.A., Cej R., Ob osnovnyh ponyatiyah teorii fil'tracii i osnovnyh etapah ee razvitiya// Vestnik Aдыгейского государственного университета, seriya 4: estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki, -№3(266). - 2007
- 2.Mejrmanov A. M. O nekotoryh principah modelirovaniya zadach fil'tracii zhidkosti so svobodnoj granicej //Nauchnye vedomosti. -№13(53). -2008
- 3.Mejrmanov A. M. Zadacha Stefana.Novosibirsk: Nauka, 1986.
- 4.Piven' D. F. Matematicheskie modeli fil'tracii zhidkosti. - Oryol: izdatel'stvo FGBOU «Orlovskij gosudarstvennyj universitet», -2015. - 408 s.

**Мусина Алла Александровна**

**Должность:** докторант кафедры «Математика, Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова

**Почтовый адрес:** 030000, Казахстан, г.Актобе, пр-т А.Молдагуловой, 34

**Сот.тел:** +7 702 618 9714

**e-mail:** alla.mussina@mail.ru

**Аман Кульнар Панабековна**

**Должность:** кандидат технических наук, доцент кафедры «информатики и информационных технологий», Актюбинский региональный университет им.К. Жубанова

**Почтовый адрес:** 030000, г.Актобе, пр-т А.Молдагуловой, 34

**Сот.тел:** +7 701 554 0305

**e-mail:** kulnar@inbox.ru

**Мусина Алла Александровна**

**Лауазымы:** "математика" кафедрасының докторанты, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

**Пошталық мекен-жайы:** 030000, Қазақстан, Ақтөбе қаласы, пр-т А.Молдагуловой, 34

**Ұялы.тел:** +7 702 618 9714

**e-mail:** alla.mussina@mail.ru

**Аман Кульнар Панабековна**

**Лауазымы:** техника ғылымдарының кандидаты, "информатика және ақпараттық технологиялар" кафедрасының доценті, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті

**Пошталық мекен-жайы:** 030000, Қазақстан, Ақтөбе қаласы, пр-т А.Молдагуловой, 34

**Ұялы.тел:** +7 701 554 0305

**e-mail:** kulnar@inbox.ru

**Mussina Alla Aleksandrovna**

**Position:** Doctoral student of the Department of "Mathematics", Aktobe Regional University named after K. Zhubanov

**Postal address:** 030000, Kazakhstan, Aktobe, A. Moldagulova Ave., 34

**Mob. tel:** +7 702 618 9714

**e-mail:** alla.mussina@mail.ru

**Aman Kulnar Panabekovna**

**Position:** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of "Informatics and Information Technologies" , Aktobe Regional University named after K. Zhubanov

**Postal address:** 030000, Kazakhstan, Aktobe, A. Moldagulova Ave., 34

**Mob. tel:** +7 701 554 0305

**e-mail:** kulnar@inbox.ru